6/3/19

Άσκηση: Δείξτε ότι η $\mathbb{Q}^*$ δεν είναι κυκλική ομάδα.

Λύση: Έστω $\mathbb{Q}^*$ κυκλική $\Rightarrow \mathbb{Q}^* = \langle \frac{\kappa}{\lambda} \rangle = \left\{ \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ μκδ$(\kappa, \lambda) = 1$

Έστω p πρώτος τέτοιος ώστε $p \nmid \kappa$, $p \nmid \lambda$ π.χ. οποιοδήποτε πρώτο μεγαλύτερο και του $|\kappa|, |\lambda|$.

$p \in \mathbb{Q}^* = \langle \frac{\kappa}{\lambda} \rangle \Rightarrow p = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^n$

i) $n = 0 \Rightarrow p = 1$ Άτοπο

ii) $n > 0 \Rightarrow p = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^n \Rightarrow p \cdot \lambda^n = \kappa^n \Rightarrow p \mid \kappa^n \Rightarrow p \mid \kappa$

p: πρώτος Άτοπο

iii) $n<0 \Rightarrow p = \left(\frac{k}{\lambda}\right)^{n} \Rightarrow p = \left(\frac{\lambda}{k}\right)^{-n} \Rightarrow p\cdot k^{-n} = \lambda^{-n}$

$\Rightarrow p \mid \lambda^{-n} = \underbrace{\lambda \cdots \lambda}_{-n-\text{φορές}} \Rightarrow p \mid \lambda$ ΑΤΟΠΟ

Άρα η Q^* δεν είναι κυκλική

Ομάδα μεταθέσεων του A $(S_A, \circ)$

$A = \{1, 2, \dots, n\}$ Μεταθέσεις του A (1-1, επί αντιστοιχίσεις από το A στο A) σύνθεση

$S_{\{1,2,\dots,n\}} = S_n$ συμμετρική ομάδα

Παράδειγμα: 1) $\sigma \in S_9$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 2 & 6 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} =$$

$= (1,3,4,8,9,5,2,7)(6)$: κύκλος μήκους 8

2) $$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} =$$

$= (1,3,5)(2,6)(4)(7,8,9)$: Δεν είναι κύκλος

3) $\tau = (1,3,5)(2,6)(4)(7,8,9) =$ το κάθε στοιχείο μόνο του

$= \big((1,3,5)(2)(4)(6)(7)(8)(9)\big)\big((2,6)(1)(3)(4)(5)(7)(8)(9)\big)(I)\big((7,8,9)(1)(2)(3)(4)(5)(6)\big)$

$= (1,3,5)(2,6)(7,8,9)$

γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους

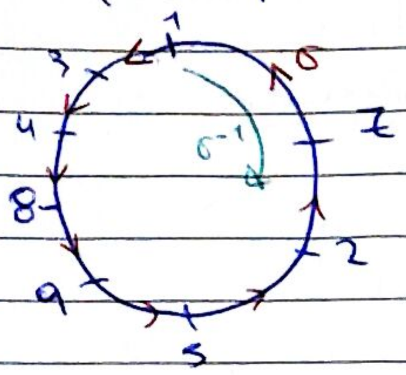
$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 8 & 2 & 6 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & 3 & 9 & 6 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(9) \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(9) \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 \end{pmatrix}$$

Date. No.

$\sigma = (1,3,4,8,9,5,2,7)$

$\sigma^{-1} = (7,2,5,9,8,4,3,1)$



$\tau = (1,3,5)(2,6)(7,8,9)$

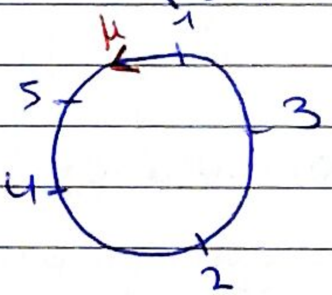
$\tau^{-1} = (5,3,1)(6,2)(9,8,7)$

Άσκηση 1) Έστω $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Βρείτε το μ^{-1} με 2 τρόπους.

Λύση: $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1,5,4,2,3) = (4,2,3,1,5)$

5 διαφορετικοί τρόποι γραφής

$\mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (3,2,4,5,1)$



2) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 7 & 4 & 1 & 8 & 9 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,6)(2,10)(4,7,8,9,5) =$

$= (7,8,9,5,4)(3,6,1)(10,2)$

Γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους μετατίθενται

$c_1, c_2, \ldots, c_s$ κύκλοι ξένοι μεταξύ τους

$c_1 c_2 \ldots c_s = c_2 c_1 \ldots c_s = c_s c_1 c_2 c_3 \ldots c$

Άσκηση: Βρείτε το αποτέλεσμα:

$(1,2,5,7)(3,4,6,7)(1,4,8,9,3)(5,2,6,3)(4,7,2) =$

$= (1,7)(2,8,9,4,3,6)\cancel{3}(5) = (2,8,9,4,3,6)(1,7)$

6 διαφ. τρόποι γραφής 2 διαφ. τρ. γραφής

$6 \times 2 = 12$ διαφ. τρόπ. γραφής

Ορισμός: Αντιμετάθεση ονομάζεται ένας κύκλος μήκους 2. Συνήθως συμβολίζεται με (i,j)

(π.χ.) $(3,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$

Παρατήρηση: Οποιαδήποτε μετάθεση γράφεται ως γινόμενο αντιμεταθέσεων (όχι απαραίτητα ξένων μεταξύ τους)

(π.χ.) $(2,3,7,5,4) = (2,4)(2,5)(2,7)(2,3)$

!

$(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{s-1}, r_s) = (r_1, r_s)(r_1, r_{s-1}) \ldots (r_1, r_3)(r_1, r_2)$

Άσκηση: Γράψτε σα γινόμενο αντιμεταθέσεων τις παρακάτω μεταθέσεις:

i) $\sigma_1 = (1,3,5,7)$

ii) $\sigma_2 = (2,4,10)(5,7)(3,1,8,9)$

iii) $\sigma_3 = (1,2,3,4,5)(6,7,8)$

Λύση: i) $\sigma_1 = (1,3,5,7) = (1,7)(1,5)(1,3) = (5,7,1,3)$

$= (5,3)(5,1)(5,7)$

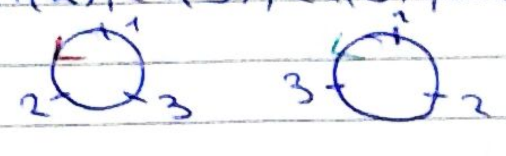
ii) $\sigma_2 = (2,4,10)(5,7)(3,1,8,9) = (2,10)(2,4)(5,7)$

$(3,9)(3,8)(3,1)$

iii) $\sigma_3 = (1,2,3,4,5)(6,7,8) = (1,5)(1,4)(1,3)(1,2)(6,8)(6,7)$

Ορισμός: Μια μετάθεση λέγεται άρτια αν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο αρτίου πλήθους αντιμεταθέσεων. Μια μετάθεση λέγεται περιττή αν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων.

(π.χ.) $S_3 = \{ I, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2) \}$



$A_3 = \{ I, (1,2,3), (1,3,2) \} < S_3$ (A_3: ομάδα της S_3)

και

$B_3 = \{ (1,2), (2,3), (1,3) \}$

A_3: εναλλάσσουσα υποομάδα

Υπενθύμιση

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$n!$ προσθετέας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$